解析空間のBlowing Downについて (代数幾何学の研究)

藤木, 明

数理解析研究所講究録
183巻 1973年 24-30

解析空間の blowing down について

京大 数研 藤木 明

X を analytic space, A をその subspace, $f: A \to \bar{A}$ を別の analytic space $\bar{A}$ への proper surjective な morphism とする。この時
問題: $\bar{A}$ を subspace として含む analytic space $\bar{X}$ と proper surjective な morphism $\tilde{f}: X \to \bar{X}$ が存在して 1) $\tilde{f}(A)=\bar{A}$ かつ $\tilde{f}|A=f$, 及び 2) $\tilde{f}|X-A$ は isomorphic, という2つの条件が満たされるための (imbedding $A \hookrightarrow X$ に関する) 条件を求めよ。我々の主張する定理は,

定理: $A \subset X$ を locally principal とし, 次の2つを仮定する。
1) $N^*_{A/X}$ は f-ample, 2) $R^1 f_* N^{*\otimes\nu}_{A/X} = 0$ for every $\nu > 0$.
この時上の問題の解 $\tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \bar{X}$ が同型を除き一意に存在する。
ここで $N^*_{A/X}$ は A の X 内における conormal sheaf.

定理は $A \hookrightarrow X$ が locally a complete intersection の場合でも 1) をしかるべき条件でおきかえれば成立する。証明は論文として発表する予定なので, ここでは条件 1) 2) について blowing down の一般論と関連させながら述べてみたい。まず 1) は negativity condition

ないしは projectivity condition とも呼ぶべきもので，一言で言えば，f の各 fibre 上に A の X 内での normal bundle を制限した時，これが negative だ，という意味である。この時得られる morphism $\tilde{f}: X \to \bar{X}$ は projective morphism i.e. $\bar{X}$ の適当な ideal を center とする blowing up によって得られる。Bimeromorphic morphism は必ずしも ideal の blowing up ではないから，条件 1) は blowing down の必要条件ではない。定理において特に $\dim \bar{A} = 0$，つまり $\bar{A}$ が点の場合は，2) は自動的に成立し，normal bundle が negative なら point に contractible であるという Grauert [2] の定理を与える。もっとも Grauert の証明法は函数論的なものである。これ程大雑把な言い方をすれば，normal bundle が negative $\Leftrightarrow$ normal bundle の 0-section として A は contractible $\Rightarrow$ 0 section の近傍は強擬凸，実際 $\exists$ 強多重劣調和函数 Φ on $N_{A/X} - A$，C^∞ on $N_{A/X}$．$\Rightarrow$ $A \hookrightarrow X$ の近傍 U にも $\exists \Phi_1$，C^∞ on U，かつ強多重劣調和 on $U-K$，K コンパクト in U。 ここではもちろん最后の $\Rightarrow$ が問題である。Grauert はここで，強擬凸 $\Rightarrow$ 正則凸という Levi の問題の解と，正則凸 X と極大コンパクト A に対し，A の point への contraction が存在するという Remmert の還元定理を前提としている。実際 $A \subset X$ の point contraction と，強擬凸 n.b.d $A \subset U \subset X$ の存在は同値であって，function theoretic な意味で point contraction の特徴づけを与える。従って $\dim \bar{A} > 0$ の場合（または relative contration の場合~~特~~とし言ふ。）1) にかわる条件としては何か強擬凸 n.b.d の存在に

対応する条件たとえば "$\forall \bar{a} \in \bar{A}$ に対し $\exists V_{\bar{a}} \supset f^{-1}(\bar{a})$ in X and $\exists \Psi_{\bar{a}}$ C^{∞} on U を強多重劣調和 on $V_{\bar{a}} - V_{\bar{a}} \cap A$" が考えられる。しかしこれはシンポジウムであげた例：$L \to B$ を $H^1(B, L^*) \neq 0$ なる manifold B 上の negative line bundle. $\pi: X \to L$ を $0 \neq \xi \in H^1(B, L^*) \hookrightarrow H^1(L, \mathcal{O}_L)$ に対応する ~~狀~~ L 上の affine bundle, $A = \pi^{-1}(0\text{-section})$. // が容易に反例を与える。実際 $A \cong B \times \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$; complex line $f: A \to \bar{A} = \mathbb{C}$ を第二成分への射影とする。この時 X は f に沿って blow down できないことが $\xi \neq 0$ から容易に結論される。一方 $N_{A/X}|f^{-1}(a) \cong L$ は negative であり、この時最初に述べた定理の証明の途中において上の条件" "をみたすような $V_{\bar{a}}$ と $\Psi_{\bar{a}}$ の存在が示される。このことから relative の場合には簡単な函数論的な特徴づけは存在しないことが予想される。一方、条件 i) を除こうとする別の考え方として、上の Grauert の定理を normal bundle を A の X 内での 1 n.b.d と読みかえて 1 n.b.d で A が contractible $\Rightarrow$ A は X 内で実際に contractible という命題を考えれば、たとえば次のような formulation が考えられる。問：$A \hookrightarrow X$ が与えられた時、$A \hookrightarrow X$ がある ν-n.b.d ($\nu > 0$) で contractible なら、実際に contractible か？ あるいは $A \hookrightarrow X$ の formal n.b.d で A が contractible なら A は実際に contractible か。ところで Artin は [1] において後者を algebraic space の category において一般の場合に証明した。しかも Artin はその応用として最初に述べた定理を algebraic space の category において証明したことを.

ここで注意しておく。彼の証明は algebraic approximation theorem on henselian local ring を基礎とするもので、それ以前の blowing down の問題へのいずれの approach とも異なる見事なものである。その定理は[ ]の言い方を借りれば formal modification は converge する、ということになる。函数論的には formal n.b.d が holomorphically convex なら実際に holomorphically convex な近傍が存在するか？と言いかえてもよいだろう。ところで Moišezon によれば、この formal ⇒ converge という命題が、modification は relative に algebraic なものであるということを示唆する意味で最重要なものだということになる。実際 $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{\bar{X}}$ が適当な意味での formal modification で、$\hat{\bar{X}}$ が何らかの意味で formally smooth の時、上の命題は彼の弟子の一人によって証明されたそうである。ところで、勝手な modification $f: X \to \bar{X}$ は projective なもの $f_1: X_1 \to \bar{X}$ によって dominate される；$\exists \sigma: X_1 \to X$ s.t $f \cdot \sigma = f_1$.
(Chow の lemma. Raynaud-Gruson in the alg. case. Inventi 1971, Hironaka in the analytic case)。これがもし formal category に拡張できるならば、最初の定理から逆に formal ⇒ converge が従う。これを説明する。

formal Chow lemma (望ましい形). $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{\bar{X}}$ を formal modification (Artin[ ] の意味. $\hat{X}$: X の A に沿う completion, $\hat{\bar{X}}$ formal anal. space) とする時 $\exists\, \mathcal{J}$: ideal-sheaf on $\hat{\bar{X}}$ で ideal of definition $\mathcal{J}_0$ of $\hat{\bar{X}}$ の適当な巾を含むもの, s.t. $\hat{g}: \hat{X}_1 \to \hat{\bar{X}}$ を $\mathcal{J}$ に沿っての blowing up とする時, $\exists\, \hat{\sigma}$: $\hat{X}_1 \to \hat{X}$ morphism s.t $\hat{f} \cdot \hat{\sigma} = \hat{g}$. // この時 $\hat{f}(\mathcal{J})$ は $\mathcal{J}$ が $\mathcal{J}_0$ の

中を含むことから，$\exists \mathcal{J}$: ideal の sheaf の X s.t. $\hat{\mathcal{J}} = \hat{f}^{-1}(\mathcal{J})$. $\sigma_0 : X_2 \to X$ を $\mathcal{J}$ を中心とする blowing up とする。さらに $\hat{X}_2$ を $\sigma_0^{-1}(\mathcal{J})$ に沿っての formal completion $\hat{\sigma}_0 : \hat{X}_2 \to \hat{X}$ を induced map とすると monoidal 変換の universality から $\sigma_{21} : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$ が induce されることは容易。一方 $\hat{\sigma}$ は $\hat{f}^{-1}(\mathcal{J})$ の blowing up であるから，σ_{21} は実は同型，つまり $\hat{X}_1 = X_2$ の $\sigma_0^{-1}(\mathcal{J})$ に沿っての formal completion と同型。ところが，$\hat{\mathcal{J}}$ は blowing up であったから，結局 $\sigma_0^{-1}(\mathcal{J})$ の X_2 内での normal bundle は negative となる。また次に~~述~~みるように条件 2) は $f : A \to \bar{A}$ の各 fibre の近傍での hol. fns が X 内で A に沿っての formal n.b.d にまでのびるという~~事~~事実を意味するが，この条件は formal modification が存在するという条件から自動的に出る。従って最初の定理を X_2 に対して用いることができ，さらにこれから X に対する modification の存在を言うのは~~用~~容易~~要~~である。次に条件 2) について説明する。$0 \to \mathcal{J}_A^n/\mathcal{J}_A^{n+1} \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^{n+1} \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^n \to 0$ から生じる exact sequence. $R^0 f_* \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^{n+1} \to R^0 f_* \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^n \to R^1 f_* \mathcal{J}_A^n/\mathcal{J}_A^{n+1} \to$ と $\mathcal{J}_A^n/\mathcal{J}_A^{n+1} \cong N_{A/X}^{* \otimes n}$ から，条件 2) $\Rightarrow R^0 f_* \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^{n+1} \to R^0 f_* \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^n \to 0$ exact. つまり上に述べた意味になる。ただしここで $R^0 f_* \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_A^n$ は $U \subset \bar{A}$ に対し $\Gamma(A_{(n)} \cap f^{-1}(U), \mathcal{O}_{A_{(n-1)}})$ を対応させる presheaf により定義される sheaf とする。(f は $A_{(n)}$ 上では定義されていないことに注意). このことは言いかえれば，map $f : A \to \bar{A}$ が $\hat{f} : \hat{X} \to \bar{A}$ までのびるといってもよい。すると結局~~問~~問題は $\hat{f} : \hat{X} \to \bar{A}$ が，$\check{f} : U \to \bar{A}$，($U$: A の X 内での適当な近傍) に延びるかという formal $\Rightarrow$ convergence

の問題になる。ここでこの convergence は、$0 \to \mathcal{I}_A^{n+1} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A^{n+1} \to 0$ から生ずる exact sequence. $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \to \Gamma(A, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_A^{n+1}) \to H^1(U, \mathcal{I}_A^{n+1}) \to \cdots$ (U とと同様) からわかるように、$H^1(U, \mathcal{I}_A^{n+1}) = 0$ $n \gg 0$ なら満たされる。これを与えるのが我々の場合 Nakano-Hironaka による weakly 1complete complex space とその上の positive ~~normal~~ line bundle に対する cohomology 消滅定理[7]であった。そして、この cohomology 消滅定理を適用するために、条件 1) 2) のもとで、A の各 fibre の近傍として weakly 1complete なものがとれ、その上で $\mathcal{I}_A$ が positive (invertible) sheaf になることを check するのが我々の唯一の contribution であった。projectivity assumption から何らかの cohomology 消滅定理を用いて、projective な blowing down を導く証明法は標準的である。c.f. Kodaira [6]. Griffiths [3] V, また Hartshorn [4] Chap. II. Th 4.2 。[6] では小平 vanishing. [3] では Griffiths 自身による type (s, t) の line bundle に対する消滅定理が用いられる。さて条件 2) のかわりに、extension の存在 ($\bar{f}: X \to \bar{A}$) を仮定してしまう場合、定理は Knorr-Schneider [5] により証明された。しかもこの場合には幾何の代わりに函数論的な特徴づけすら存在する。[5], Siu [9]. つまり $f: X \to \bar{A}$ を 1 convex map (i.e. $\forall \bar{a} \in \bar{A}$ に対し $^\exists U \ni a$ n.b.d in $\bar{A}$, $^\exists \psi$: C^∞ fn on $f^{-1}(U)$, $^\exists c \in \mathbb{R}$ s.t 1) ψ は強多重劣調和 on $\{x \mid \psi(x) > c\}$ かつ 2) $\forall c' > c$ に対し $f|\{x \mid \psi(x) \leq c'\}$ は proper) とする時、$^\exists g: \bar{X} \to \bar{A}$: Stein map $^\exists$(i.e. $\forall \bar{a} \in \bar{A}$ に対し $^\exists V \ni \bar{a}$ n.b.d in $\bar{A}$, s.t $g^{-1}(V)$ is Stein) $^\exists \sigma: X \to \bar{X}$ morphism with $f \cdot \sigma = g$. s.t. $\sigma_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\bar{X}}$. このことからもmodificationへのobstructionはfiniteなpartにしか存在しないことが予想される。

最後にblowing downの変形について述べる。strictly pseudoconvex manifoldの微小変形はstrictly pseudoconvexで、そのfamilyは1 convex mapとなる。従って一斉blowing downが(上で述べた結果により)存在する。i.e point contractionの変形はpoint contractionである。relative caseにおいては次の定理が知られている: monoidal変換の変形はmonoidal変換。しかし一般にはこの事実に対する反例が、P^3の例において affine bundle X_t: $t\xi \in H^1(L, \mathcal{O}_L)$, $0 \leq |t| < 1$, で定義して得られる。この例ではX_0はrelativeにblowing downが可能だがX_t, $t \neq 0$ではすでに述べたようにこれは不可能である。

文献

[1] M. Artin: Algebraization of formal moduli: II, Ann. of Math., 91 (1970), 88-135.

[2] H. Grauert: Über modifikationen und exzeptionelle analytischen mengen. Math. Ann. 146 (1962) 331-368

[3] P. Griffiths: The extension problem in complex analysis II., Amer. J. Math. 88 (1966) 366-446.

[4] R. Hartshorne: Ample subvarieties of alg. varieties, Springer lecture note No 156 (1970)

[5] K. Knorr u. M. Schneider: Relativexzeptionelle Analytische Mengen. Erscheint demnächst.

[6] K. Kodaira: On Kähler varieties of restricted type, Ann. of Math., 60 (1954), 38-48

[7] S. Nakano: Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds. to appear.

[8] Y. T. Siu: The 1-convex generalization of Grauert's direct im. theorem, Math. Ann. 190, 203-214 (1971)